Να υπολογισθεί το όριο

\displaystyle{\lim_{n\to \infty} e^{-n}\left(1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots +\frac{n^n}{n!}\right)}

(Φαινομενικά κάνει 1 γιατί το 2ο μέρος είναι ανάπτυγμα Τaylor της εκθετικής αλλά δεν ισχύει αυτό)

Λύση

Θεωρούμε n ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές X_i (i=1,2,\dots,n) καθεμια από τις οποίες έχει την κατανομή Poisson με παράμετρο 1.

Τότε η S_n=\sum_{i=1}^n X_i έχει την καταnομή Poisson με παράμετρο n αφού είναι ανεξάρτητες.

Επομένως,

\displaystyle{P(S_n\leq n)=e^{-n}\left(1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots +\frac{n^n}{n!}\right)}.

Για μεγάλο n, από το Κεντρικό οριακό θεώρημα(ΚΟΘ), η κατανομή της S_nπροσεγγίζει την κανονική κατανομή με μέση τιμή και διακύμανση n.

Sn~N(0, n)  
  
Συνεπώς, θα είναι

\displaystyle{\lim_{n\to \infty} P(S_n\leq n)=\frac{1}{2}}.